

MATEMATICA III

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA, ECONOMIA, FINANZA E ASSICURAZIONI
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE, INFORMATICA E STATISTICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
A.A. 21/22

DOCENTE: DOTT. GIULIO GALISE

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Prova scritta del 15.03.2022 (appello straordinario)

Esercizio 1 (6 punti). Siano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| + |y| < 1\}, \quad B = \left\{ \left(x, 1 - \frac{x}{2}\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \right\}.$$

Rappresentare graficamente l'insieme $A \cup B$. Dire, senza giustificare la risposta, se A è aperto, convesso, $(0, 1) \in \partial(A \cup B)$, B è limitato e infine indicare la chiusura $\overline{A \cup B}$.

Esercizio 2 (9 punti). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = e^x \cos(y) + e^y \sin(x).$$

(i) Calcolare la derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 0)$$

essendo $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(ii) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 0, f(0, 0))$.

(iii) Verificare che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(iv) Stabilire se esiste una funzione $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin(y) \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 3 (9 punti). Sia $h(x, y) = x|y - x| - y$.

- (i) Determinare massimo e minimo assoluti di h nel quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.
- (ii) Determinare

$$\sup_{\mathbb{R}_+^2} h \quad \text{e} \quad \inf_{\mathbb{R}_+^2} h,$$

essendo

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

Esercizio 4 (9 punti). Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Calcolare i seguenti integrali doppi:

(i) $\iint_D \sqrt{y} \cos(x^4) \, dx dy$

(ii) $\iint_D \frac{x^3 y \sin(y^2)}{1 - y^2} \, dx dy.$